课本中空间完备化的定义是错误的

王振建 wzhj@ustc.edu.cn

1 完备化空间的三种定义

在课堂上，我们证明了下面的定理。

定理1. 给定一个度量空间$(\mathscr{X},\rho)$,在相差一个等距同构的意义下，存在唯一的度量空间$(\mathscr{X}_1,\rho_1)$使得

(i) $\mathscr{X}_1$完备；

(ii) 存在等距嵌入$T:\mathscr{X}\to\mathscr{X}_1$使得$T\mathscr{X}$在$\mathscr{X}_1$中稠密。

在有些书上，这个定理被称为Hausdorff定理。由此定理出发，我们可以给出度量空间的完备化空间的第一种定义。

定义1. 称满足上述条件（i）（ii）的度量空间$(\mathscr{X}_1,\rho_1)$为$(\mathscr{X},\rho)$的完备化（空间）。

在证明定理1的过程中，我们采用了以下构造性的证明。

考虑$\mathscr{X}$中的Cauchy列全体。称Cauchy列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$等价，如果

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=0.$$

将每一个Cauchy列的等价类视为一个元素，用$\mathscr{X}_1$表示这样的Cauchy列等价类的全体，$\mathscr{X}_1$中的元素用$\xi,\eta,\cdots$表示。对$\xi,\eta\in\mathscr{X}_1$，取$\{x_n\}\in\xi,\{y_n\}\in\eta$,定义

$$\rho_1(\xi,\eta)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n).$$

我们证明了这样构造的$(\mathscr{X}_1,\rho_1)$是一个度量空间，并且满足定理1中的条件（i）（ii）。由此，我们可以给出度量空间完备化的第二种定义。

定义2. 称上面用Cauchy列等价类构造的度量空间$(\mathscr{X}_1,\rho_1)$为$(\mathscr{X},\rho)$的完备化（空间）。

由定理1可知，定义2和定义1是等价的。按照这两种定义，一个度量空间的完备化空间是存在唯一的。

相对于定义1，定义2的好处在于它给出的是一个具体的度量空间。如果$(\mathscr{X},\rho)$还具有其它附加结构，如线性结构、内积结构，我们可以很容易验证完备化空间也具有类似的结构。比如，利用定义2可以很容易证明一个赋范线性空间的完备化也是一个赋范线性空间，这一点利用定义1那样的抽象化定义就不那么容易证明了；同样，利用定义2也很容易证明一个内积空间的完备化是一个内积空间，这一点利用定义1也不那么容易证明。因此，通常我们所说的完备化空间，就是特指定义2中的那个用Cauchy列等价类构造的度量空间。它的存在唯一性是显然的，因为我们把它具体构造出来了。

但是，另一方面，定义2给出的空间太具体了，进行抽象理论分析的时候使用它反而不如使用定义1方便。比如，证明在一个完备的度量空间中，一个子集的完备化与这个子集的闭包等距同构时，用定义1就比定义2方便，因为定义1中明确地指出了一个空间在它的完备化中是稠密的，这一点并没有在定义2中明显地体现出来。定义2给出的是一个具体的空间，进行理论分析时，我们必须要先验证$\mathscr{X}$与$\mathscr{X}_1$的具体关系（即$\mathscr{X}$在$\mathscr{X}_1$中稠密），这显然没有定义1直接把稠密性放在定义之中方便。

我们课本中的完备化空间的定义直观上很容易理解。既然原有的空间不完备，我们就找一个包含它的完备的空间，这样的最小的完备的空间就称为完备化空间。课本上的“包含”关系是用等距嵌入定义的。具体地说，现在我们有两个度量空间，$(\mathscr{X}_1,\rho_1)$和$(\mathscr{X}_2,\rho_2)$，如果存在$\mathscr{X}_1$到$\mathscr{X}_2$的等距嵌入$T:\mathscr{X}_1\to\mathscr{X}_2$，我们就可以把$\mathscr{X}_1$与它在$T$之下的像$T\mathscr{X}_1$等同起来，将$\mathscr{X}_1$直接视为$\mathscr{X}_2$的子集。这样的等同是可以的，也是方便的。课本上使用了记号$(\mathscr{X}_1,\rho_1)\subset(\mathscr{X}_2,\rho_2)$或者更简洁地，$\mathscr{X}_1\subset\mathscr{X}_2$。

利用上述等同和记号，在课本中，我们有了下面的完备化的第三种定义。

定义3. 包含给定度量空间$(\mathscr{X},\rho)$的最小的完备度量空间称为$\mathscr{X}$的完备化空间，其中最小的含义是：任何一个以$(\mathscr{X},\rho)$为子空间的完备化空间都以此空间为子空间。

用严格的数学语言来说，按照定义3，度量空间$(\mathscr{X},\rho)$的完备化是这样的一个度量空间$(\mathscr{X}_1,\rho_1)$，它满足以下两个条件：

(a) $\mathscr{X}_1$完备，并且$\mathscr{X}\subset\mathscr{X}_1$;

(b) 如果有另外一个度量空间$(\mathscr{X}_2,\rho_2)$，它也满足$\mathscr{X}_2$完备，$\mathscr{X}\subset\mathscr{X}_2$,那么$\mathscr{X}_1\subset\mathscr{X}_2$.

定义3相比于定义1和定义2都更容易理解，因为它最直观，也最符合我们对完备化空间的预期。我们在思想上很容易接受定义3，觉得完备化空间就应该这个样子，它就应该这样定义。只可惜，这样的定义是错误的。

2 由课本中定义给出的完备化空间不是唯一的

课本中的定义，即定义3给出的完备化空间不是唯一的，因此它与定义1、定义2不是等价的。

下面我们用一些例子说明这一点。

最简单的例子应该是这样的例子$(\mathscr{X},\rho)$，它本身完备，那么按照我们直观的想法，它的完备化就是它本身；可是，在下面的例子中，我们偏偏给出另一个完备的空间$(\mathscr{Y},r)$，使得$\mathscr{X}$可以等距嵌入到$\mathscr{Y}$中，$\mathscr{Y}$也可以等距嵌入到$\mathscr{X}$中，但是$\mathscr{X}$与$\mathscr{Y}$不等距同构。本来，按定义3，$\mathscr{X}$必须是$\mathscr{X}$的完备化，因为$\mathscr{X}$自己本身已经完备了。同时，$\mathscr{X}$的完备化也是$\mathscr{Y}$。因为

(i) $\mathscr{Y}$完备，$\mathscr{X}\subset\mathscr{Y}$；

(ii) 对任意$\mathscr{Z}$, $\mathscr{Z}$完备，$\mathscr{X}\subset\mathscr{Z}$。因为$\mathscr{Y}\subset\mathscr{X},\mathscr{X}\subset\mathscr{Z}$，所以，$\mathscr{Y}\subset\mathscr{Z}$，这是显然的。

因此，$\mathscr{Y}$也必须是$\mathscr{X}$的完备化，因为$\mathscr{Y}$满足定义3中的完备化的条件。于是，我们看到，$\mathscr{X}$的完备化既是$\mathscr{X}$又是$\mathscr{Y}$，但是$\mathscr{X}$和$\mathscr{Y}$之间没有等距同构存在，所以$\mathscr{X}$的完备化不是唯一的。

例1. 考虑
$$\mathscr{X}=[0,\infty),\ \mathscr{Y}=\{-1\}\cup[0,\infty).$$

1. 它们作为$\mathbb{R}$的子集都是闭集，因此它们都完备；

2. $\mathscr{X}$作为$\mathscr{Y}$的子集，显然可以等距嵌入到$\mathscr{Y}$中；

3. 平移映射$x\mapsto x+1$给出了等距嵌入$\mathscr{Y}\to\mathscr{X}$；

但是，$\mathscr{X}$和$\mathscr{Y}$不可能等距同构，因为$\mathscr{X}$没有孤立点，而$\mathscr{Y}$有孤立点。

可能有人要说，上面的例子属于投机取巧，利用孤立点作文章，这样的空间我们平时遇到得少，因此算不得好例子。但是，即使考虑没有孤立点的空间，定义3中定义的完备化空间也不是唯一的。下面的例子中的两个空间都没有孤立点。

例2. 考虑

$$\mathscr{X} = [0, \infty),\ \mathscr{Y} = [-2, -1] \cup [0, \infty).$$

1. 它们作为$\mathbb{R}$的子集都是闭集，因此它们都完备；
2. $\mathscr{X}$作为$\mathscr{Y}$的子集，显然可以等距嵌入到$\mathscr{Y}$中；
3. 平移映射$x \mapsto x + 2$给出了等距嵌入$\mathscr{Y} \to \mathscr{X}$；

但是，$\mathscr{X}$和$\mathscr{Y}$不可能等距同构，因为$\mathscr{X}$连通的，而$\mathscr{Y}$不是连通的；等距同构首先是一个同胚，它保持连通性。

可能有人又要说，上面的例子都不是线性空间，我们学习泛函分析主要考虑赋范线性空间，或许，按照定义3，一个赋范线性空间的完备化是唯一的呢。可是，即使只考虑赋范线性空间，而且要求完备化空间也是赋范线性空间，等距嵌入是指保持范数的线性同构（下面称之为线性等距嵌入），定义3中定义的完备化空间也不是唯一的。注意，这时定义3具有下面的形式：赋范线性空间$(\mathscr{X}, \|\cdot\|)$的完备化是这样的一个Banach空间$(\mathscr{X}_1, \|\cdot\|_1)$，它满足以下两个条件：

(a) 存在一个映射$T : \mathscr{X} \to \mathscr{X}_1$使得
   - (i) T是线性映射；
   - (ii) T保持范数不变，即$\|Tx\|_1 = \|x\|, \forall x \in \mathscr{X}$.

(b) 如果有另外一个Banach空间$(\mathscr{X}_2, \|\cdot\|)$，它也满足上面的性质$(a)$, 则存在一个映射$S : \mathscr{X}_1 \to \mathscr{X}_2$使得
   - (i) S是线性映射；
   - (ii) S保持范数不变，即$\|Sy\|_2 = \|y\|_1, \forall y \in \mathscr{X}_1$.

显然，要说明按上述方式定义的赋范线性空间的完备化不唯一，我们只需构造两个Banach空间$\mathscr{X}$和$\mathscr{Y}$,使得$\mathscr{X}$可以线性等距嵌入到$\mathscr{Y}$中，$\mathscr{Y}$也可以线性等距嵌入到$\mathscr{X}$中，但是$\mathscr{X}$与$\mathscr{Y}$不线性等距同构。道理和在例1前面的论证一样。

例3. 考虑

$$\mathscr{X} = C(K),\ \mathscr{Y} = C(L),\quad K = [0,3],\ L = [0,1] \cup [2,3].$$

它们的范数由以下方式定义

$$\|f\| = \max_{t\in K,L} |f(t)|.$$

显然，$\mathscr{X}$和$\mathscr{Y}$都是Banach空间。

1. 映射
$$T : \mathscr{X} \to \mathscr{Y},$$
$$Tf(t) = \begin{cases} f(3t), & t \in [0,1], \\ 0, & t \in [2,3], \end{cases}$$
给出了$\mathscr{X}$到$\mathscr{Y}$的一个线性等距嵌入；

2. 映射
$$T' : \mathscr{X} \to \mathscr{Y},$$
$$T'g(t) = \begin{cases} g(t), & t \in [0,1] \cup [2,3], \\ \text{线性}, & t \in [1,2], \end{cases}$$
给出了$\mathscr{Y}$到$\mathscr{X}$的一个线性等距嵌入。

因为K与L不同胚，由下面的Banach-Stone定理知$\mathscr{X}$与$\mathscr{Y}$不是线性等距同构的。

Banach-Stone定理：设K和L都是紧致Hausdorff空间，若$C(K)$和$C(L)$线性等距同构，则K和L同胚。

3 为什么课本中的定义是错误的？

通过上面的例子可以明显地看出，课本中的完备化定义，即定义3与定义1、定义2是不等价的，因为其它两种定义给出的完备化是唯一的，而定义3给出的完

备化不是唯一的。但是，仅凭这种不等价性，我们并不能说明课本中的定义就是错误的。

同样一个对象，关注的侧重点不同，就可以给出不同的定义，而这些定义有时就是不等价的。最著名的例子就是Calabi-Yau流形的定义，现在已经出现的定义，就已经有十多种了，有些定义确实是不等价的。这无可厚非，毕竟定义的目的并不是为了死抠字眼，而是为了研究方便，给出约定的术语而已。

我们定义完备化空间，仅仅是为了简化表达，以避免每次遇到不完备空间时都必须写上"考虑Cauchy列等价类构成的空间"或者"由Hausdorff定理给出的完备度量空间"等等字句。用一个词语"完备化"概括非常丰富的内容，简化非常冗长的字句，不是挺好的吗?

虽然不同的定义不等价，但是我们并不能说哪一个定义好，哪一个不好；也不能说哪一个对，哪一个不对。数学体系是公理化的，每一套理论也是公理化的，只要按照这一套理论，我们推不出矛盾，话句话说，这套理论是自洽的，我们就不能说这套理论是错的。因此，按照给出的定义，只要得不出矛盾的结果，我们就不能说这个定义是错的，哪怕它跟其它通行的定义不等价。

另一方面，对于完备化空间的定义，我们却必须说课本上的定义错了。为什么呢?

因为就数学的严格化而言，定义的东西是必须是确定的，它不能不确定。确定性，或者叫唯一性、无歧义性，是无论哪一个定义都必须要具备的特征。没有确定性，别人都不知道你说的是什么，那你这个定义还有什么意思呢? 这样给出的定义除了引起术语上的混乱之外，绝不会任何的益处。

本质上讲，当说一个空间的完备化空间是什么的时候，已经暗含这个完备化是唯一的；如果它不唯一，我们是不能这样问的。就拿课本中的例1.2.7来说，它说"$[0,3]$上多项式全体$P([0,3])$的完备化空间是$C[0,3]$"。这里，$C([0,3])$当然是$P([0,3])$的完备化，这是我们的预期；但我们同样可以说$C([0,1]\cup[2,3])$也是$P([0,3])$的完备化；由上面的例3，按照课本中完备化的定义，这么说并没有错。毫无疑问，$P([0,3])$的完备化空间是$C([0,1]\cup[2,3])$，这个结果当然不是我们想要的。归根结底，这一切都是定义的空间的不确定性造成的。

课本中有的习题中也有"指出......的完备化空间"的字句，如果完备化空间不唯一，这样的表达本身难道不就是有问题的吗? 根本就不应该这样问!

一句话，就一个定义而言，根据它得到的对象必须是存在唯一的，否则这个

定义就是错误的。按照我们课本中的完备化空间的定义，我们得不出唯一性，因此，课本中的定义是错误的。

之前已经有人指出我们课本中的“完备化空间不是唯一的”，但他们仍然坚持用课本中的完备化空间观点来认识、理解完备化，并没有彻底否定课本中的定义。现在，我们应该旗帜鲜明地指出，课本中的完备化定义是错误的，完备化根本就不应该那样定义。我们应该按照本文中的定义1或者定义2来理解完备化。

至于课本中的完备化定义错误的源头在哪里，本文不再详细讨论，留给感兴趣的同学作进一步的深入思考。